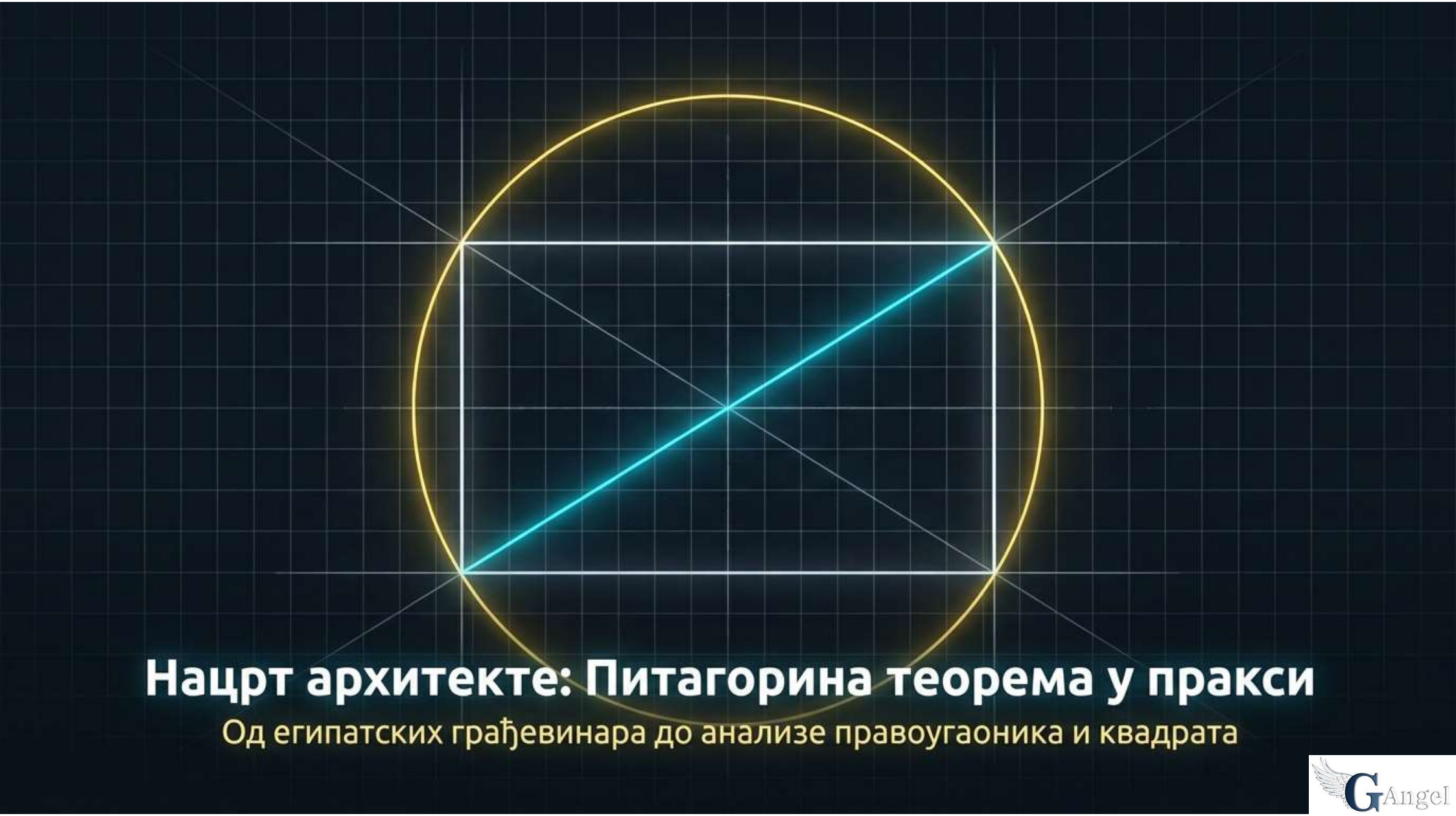
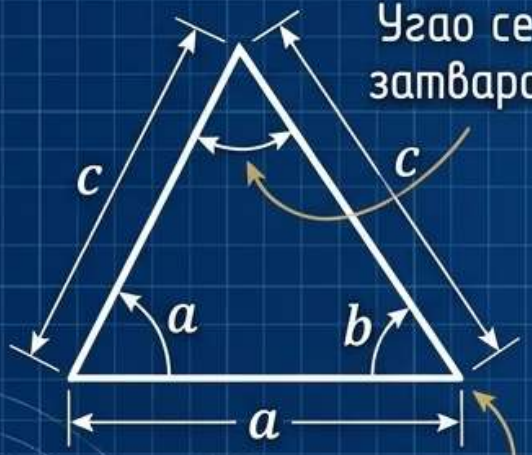

Нацрт архитекте: Питагорина теорема у пракси
Од египатских грађевинара до анализе правоугаоника и квадрата

Обрнута Питагорина теорема: Дијагностика угла

Ако за дужине страница a, b и c важи $a^2 + b^2 = c^2$, троугао је правоугли, а хипотенуза има дужину c (доказује се ССС подударношћу). Шта се дешава када једнакост не важи?

Оштроугли



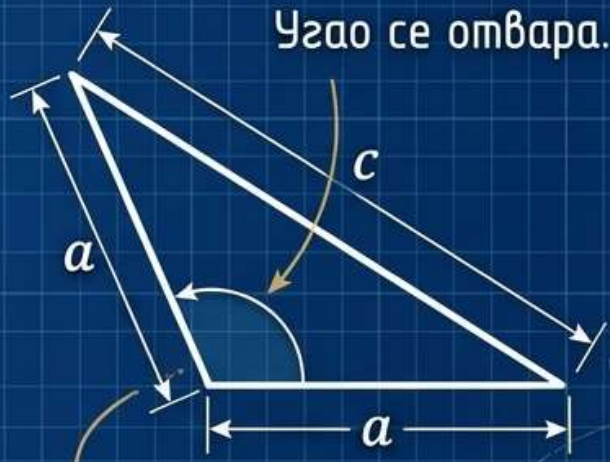
$$a^2 + b^2 > c^2$$

Правоугли



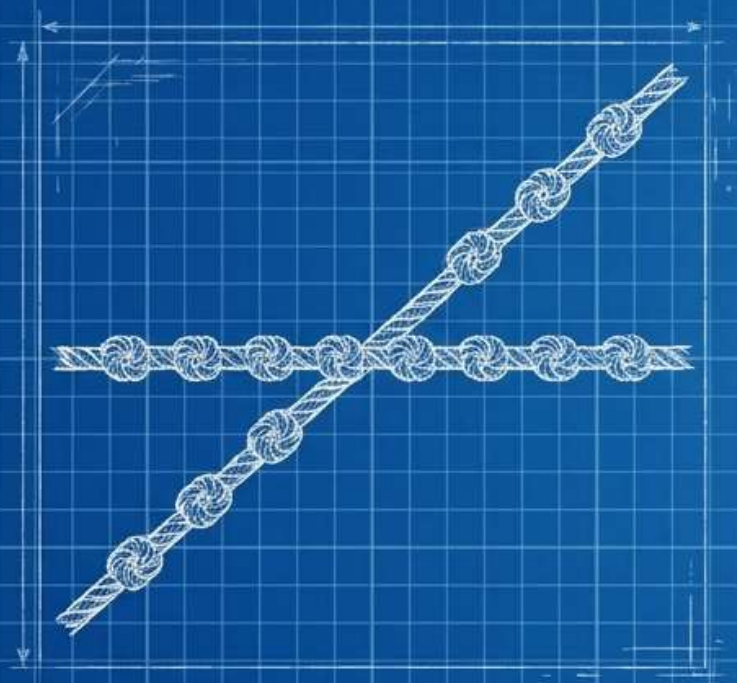
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Тупоугли

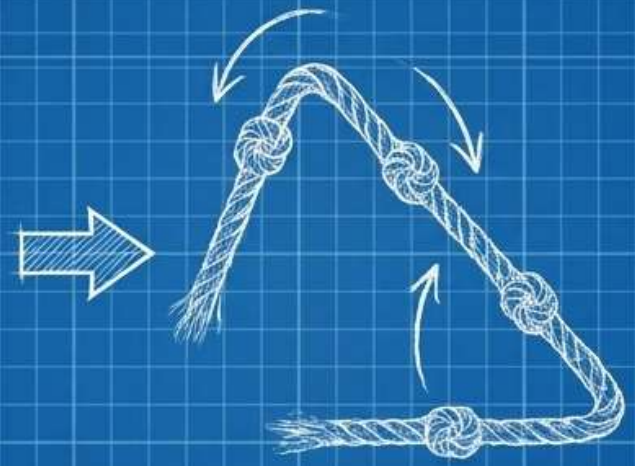


$$a^2 + b^2 < c^2$$

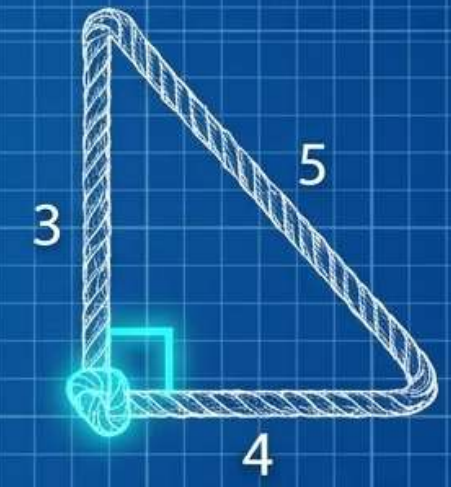
Египатски грађевинари и тајна правог угла



Канап са 12
једнаких делова



Савијање на
чворовима 3, 4 и 5

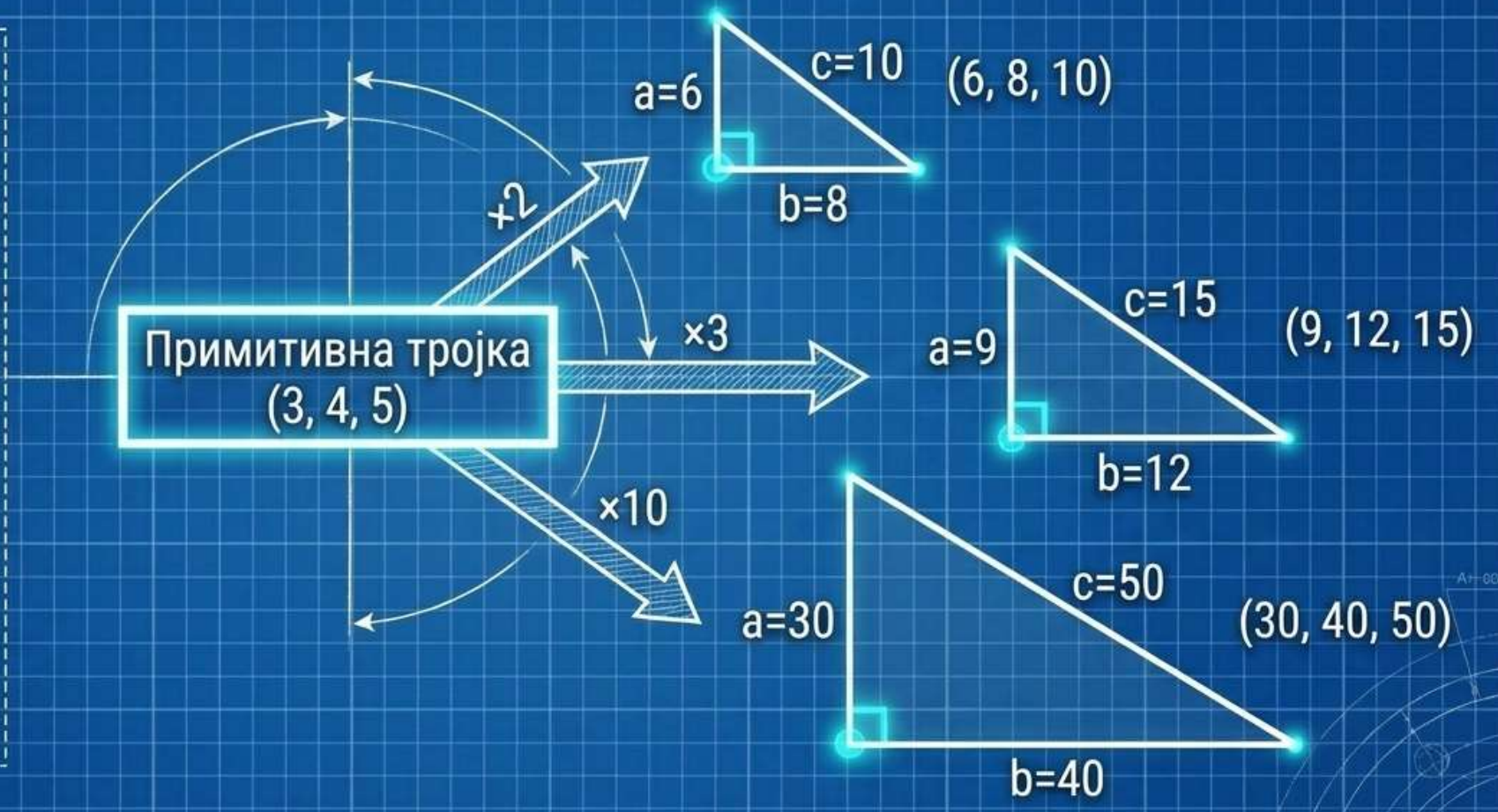


Гарантован прав угао
($3^2 + 4^2 = 5^2$)

Бесконачни свет Питагориних тројки

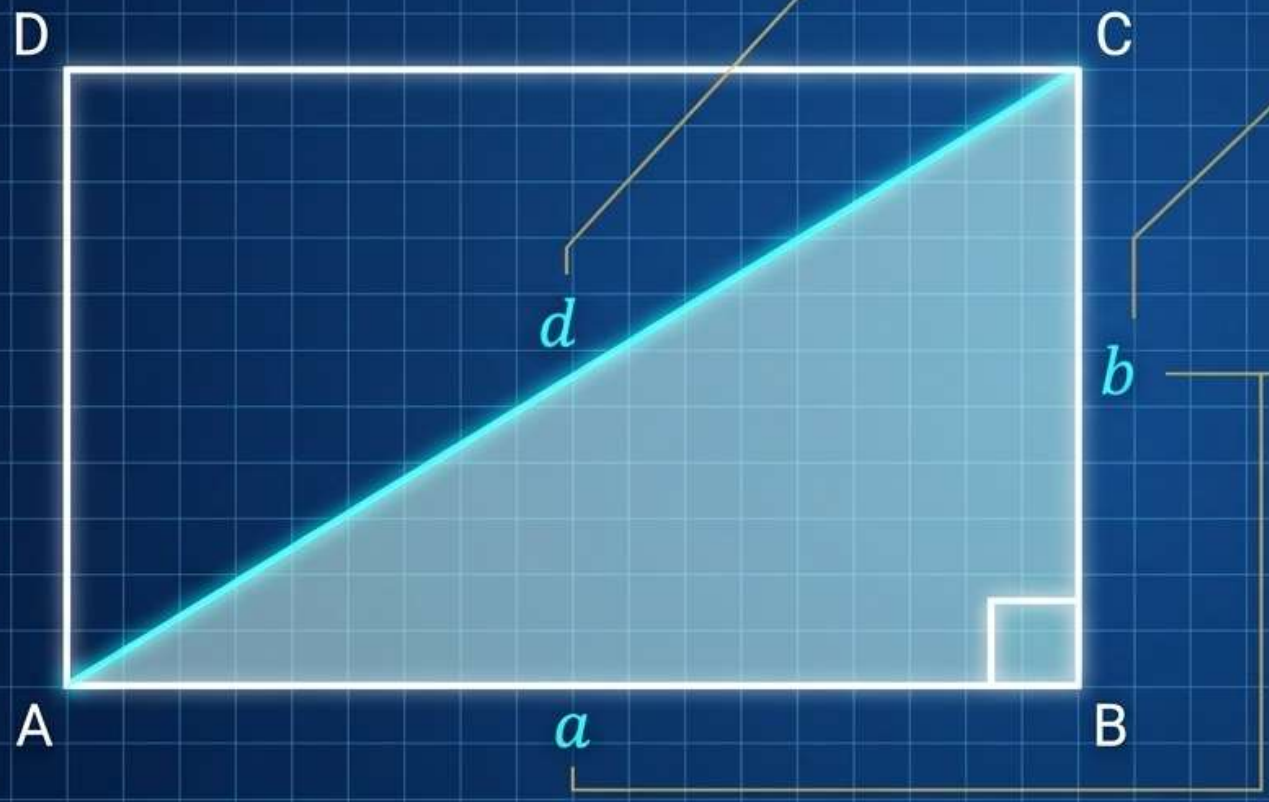
Примитивне тројке су оне чији су чланови узајамно прости бројеви.

Постоји их бесконачно много.



Познавање ових размера омогућава тренутно решавање задатака без дугог рачунања.

Анатомија правоугаоника



d: Дијагонала (хипотенуза)

a, b: Странице (катете)

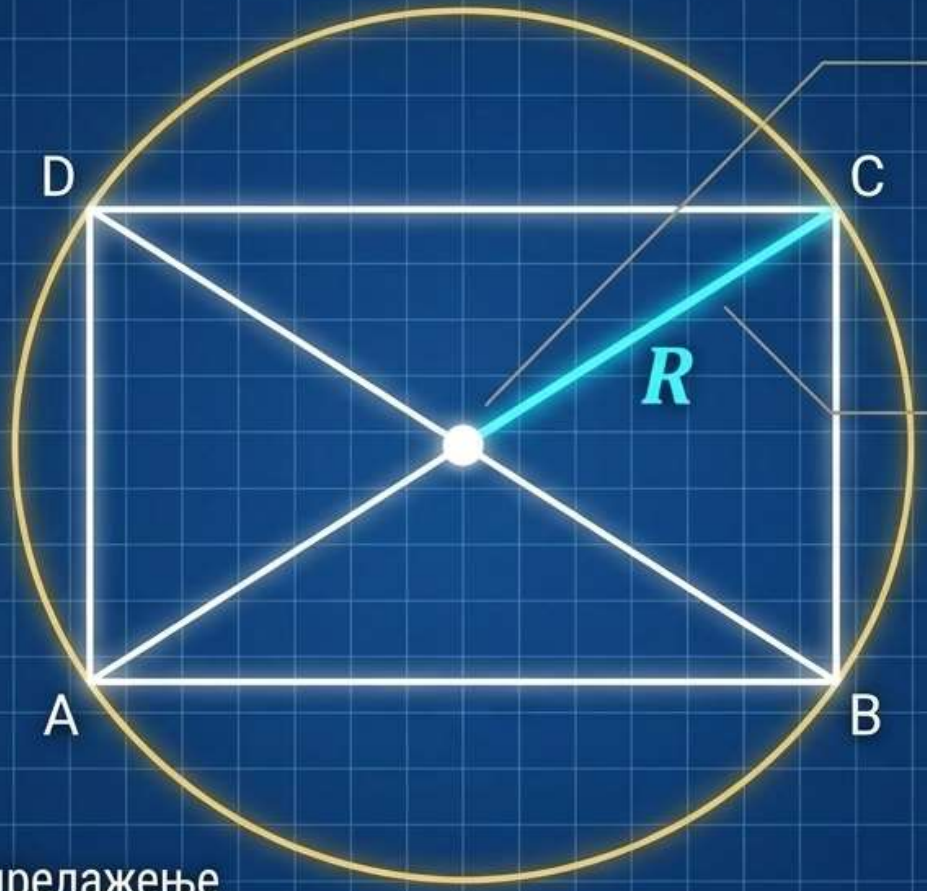
Теорема: $d^2 = a^2 + b^2$
(Дијагонала дели правоугаоник на два подударна правоугла троугла)

Обим: $O = 2a + 2b$

Површина: $P = ab$

GAngel

Описана кружница правоугаоника



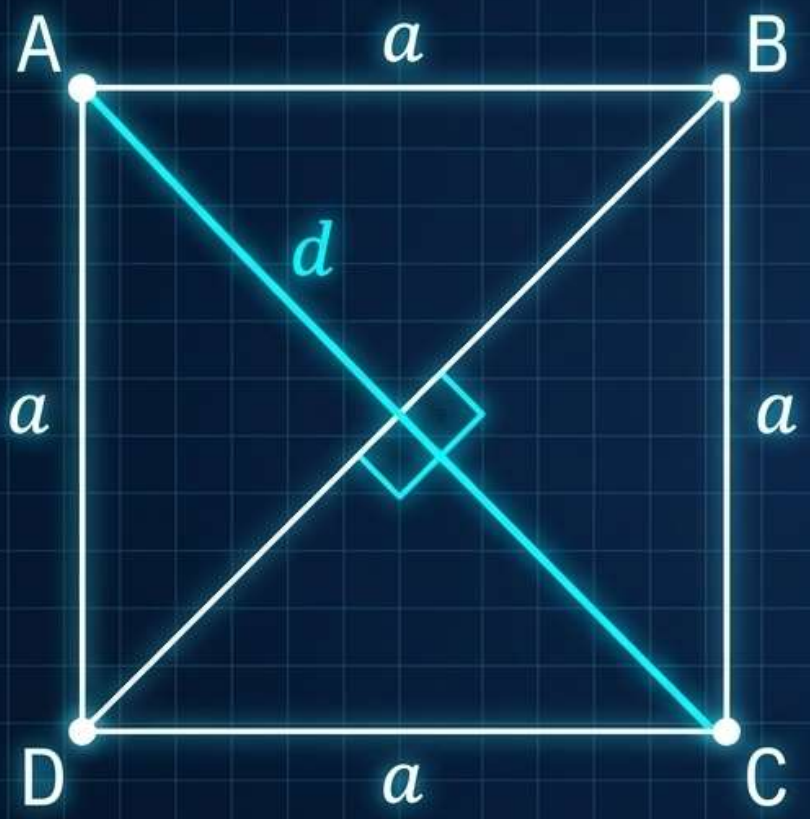
Центар: Налази се у тачки пресека дијагонала. Дијагонале се полове и једнаке су дужине.

Полупречник (R): Једнак је тачно половини дужине дијагонале.

$$R = \frac{d}{2}$$

Ова веза омогућава лако прелажење са линеарних страница правоугаоника на својства круга који га описује.

Специјални случај: Квадрат



Полазна тачка: $d^2 = a^2 + b^2$

Специфичност квадрата: $a = b$

Замена: $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

Резултат: $d = a\sqrt{2}$

Дијагонале су међусобно нормалне.

Обим: $O = 4a$

Површина: $P = a^2$ или преко дијагонале $P = \frac{d^2}{2}$

GAngel

Упоредни преглед својстава

	Правоугаоник	Квадрат
Услов	Правоугаоник ($a \neq b$)	Квадрат ($a = b$)
Дијагонала d	$d = \sqrt{a^2 + b^2}$	$d = a\sqrt{2}$
Угао између дијагонала	Нису нормалне	Међусобно нормалне (90°)
Обим O	$O = 2(a + b)$	$O = 4a$
Површина P	$P = a \cdot b$	$P = a^2$ или $P = \frac{d^2}{2}$
Полупречник R	$R = \frac{d}{2}$	$R = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

GAngel

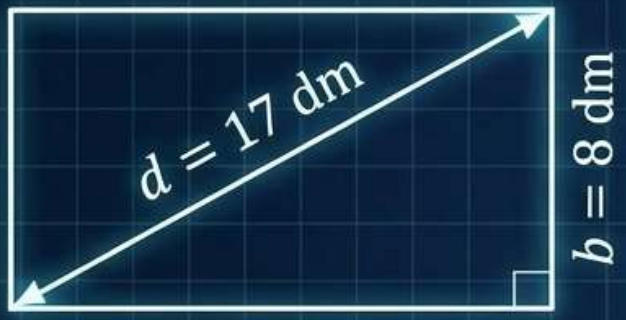
Упоредни преглед својстава

	Правоугаоник	Квадрат
Услов	Правоугаоник ($a \neq b$)	Квадрат ($a = b$)
Дијагонала d	$d = \sqrt{a^2 + b^2}$	$d = a\sqrt{2}$
Угао између дијагонала	Нису нормалне	Међусобно нормалне (90°)
Обим O	$O = 2(a + b)$	$O = 4a$
Површина P	$P = a \cdot b$	$P = a^2$ или $P = \frac{d^2}{2}$
Полупречник R	$R = \frac{d}{2}$	$R = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

GAngel

Пример 1: Од дијагонале до обима и површине

Познато (Given)



Дијагонала $d = 17$ dm

Страница $b = 8$ dm

Тражи се: O, P

План решења (Formulas)

Да бисмо израчунали O и P, неопходна је страница a.

$$a^2 = d^2 - b^2$$

Прорачун (Calculation)

$$a^2 = 17^2 - 8^2$$

$$a^2 = 289 - 64 = 225$$

$$a = 15 \text{ dm}$$

Обим:

$$O = 2 \cdot (15 + 8) = 46 \text{ dm}$$

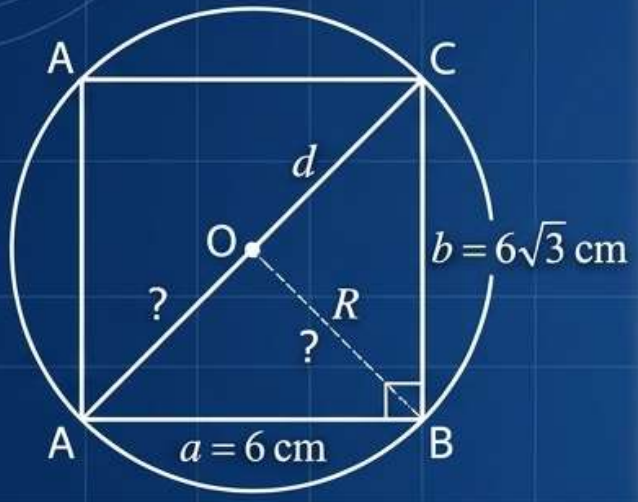
Површина:

$$P = 15 \cdot 8 = 120 \text{ dm}^2$$

GAngel

Пример 2: Ирационални бројеви и описана кружница

Познато



Странице: $a = 6\,\text{cm},\ b = 6\sqrt{3}\,\text{cm}$

Тражи се: Полупречник R

План решења

Прво тражимо дијагоналу:

$$d^2 = a^2 + b^2$$

Затим радијус: $R = \frac{d}{2}$

Прорачун

$$d^2 = 6^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2$$

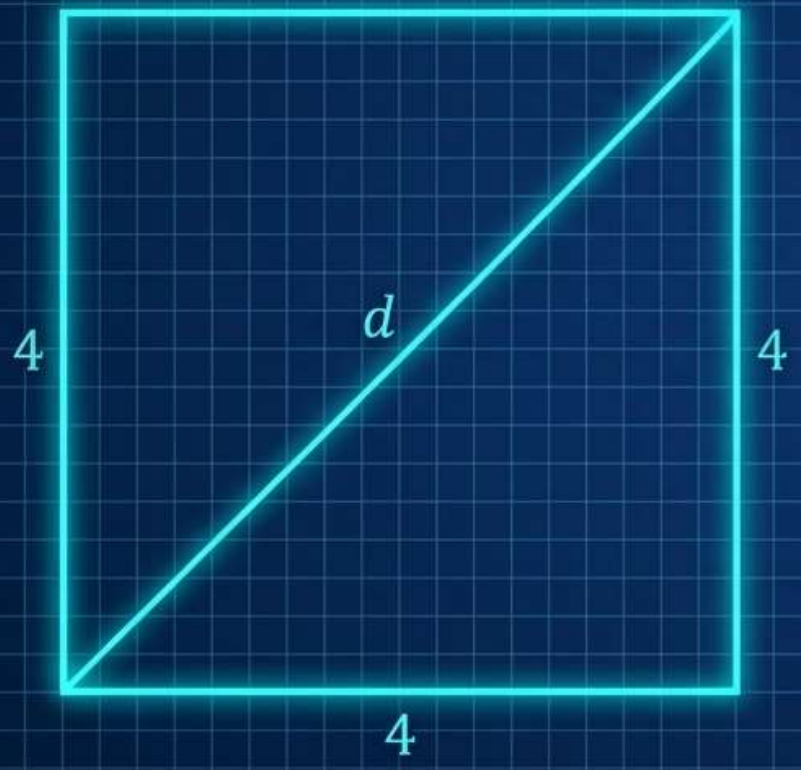
$$d^2 = 36 + (36 \cdot 3) = 36 + 108 = 144$$

$$d = \sqrt{144} = 12\,\text{cm}$$

Решење: $R = 12 : 2 =$ **6 cm**

Пример 3: Брзина специјалних формула

Познато: Квадрат странице $a = 4\ \text{cm}$. Тражи се дијагонала d.



Стандардно:

$$d^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32$$

$$d = \sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = 4\sqrt{2}\ \text{cm}$$

Директно - Препоручено:

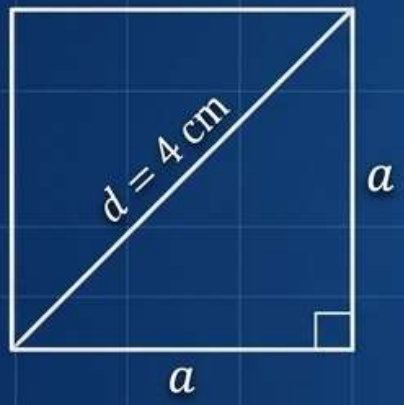
Употреба једнакости $d = a\sqrt{2}$

Решење: $d = 4\sqrt{2}\ \text{cm}$

GAngel

Пример 4: Обрнути инжењеринг квадрата

Познато



Дијагонала $d = 4\ \text{cm}$

Тражи се: a, O, P

Извођење странице a

$$d = a\sqrt{2} \rightarrow a = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\ \text{cm}$$

Обим и Површина

$$O = 4a = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}\ \text{cm}$$

$$P = a^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 4 \cdot 2 = 8\ \text{cm}^2$$

**Алтернатива за површину:*

$$P = \frac{d^2}{2} = \frac{4^2}{2} = \frac{16}{2} = 8\ \text{cm}^2$$

GAngel

Пример 5: Питагорине тројке у пракси

Познато: Правоугаоник са дијагоналом $d = 13$ и страницом $a = 5$.
Тражи се обим.

$$b^2 = 13^2 - 5^2 \rightarrow 169 - 25 = 144 \rightarrow b = 12.$$



Препознајемо примитивну Питагорину тројку: $(5, 12, 13)$.

Аутоматски закључујемо без рачунања: $b = 12$.

Коначан резултат: $O = 2 \cdot (5 + 12) = 2 \cdot 17 = \mathbf{34}$

Геометријска хармонија



Питагорина теорема није само алатка за израчунавање дужина страница. Она је универзални кључ који повезује линеарне димензије објеката са савршенством кругова и углова који их описују.

Нац