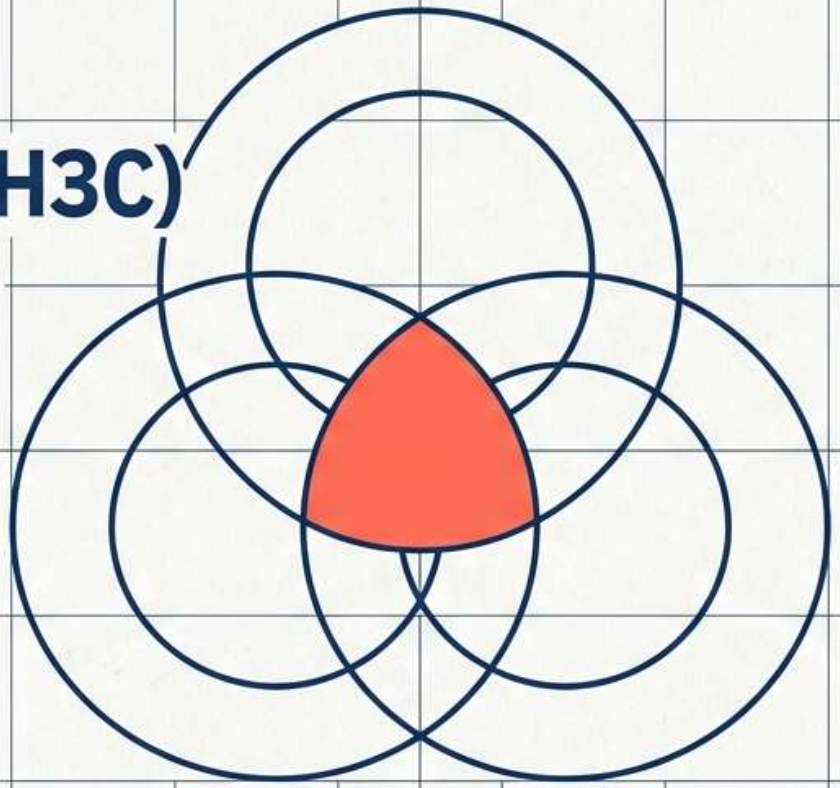
Најмањи заједнички садржалац (НЗС)

Од интуитивних концепата
до напредних својстава.



Математички нацрт // Модул: Дељивост бројева

Проблем из праксе: Периодичност сусрета

Сценарио:

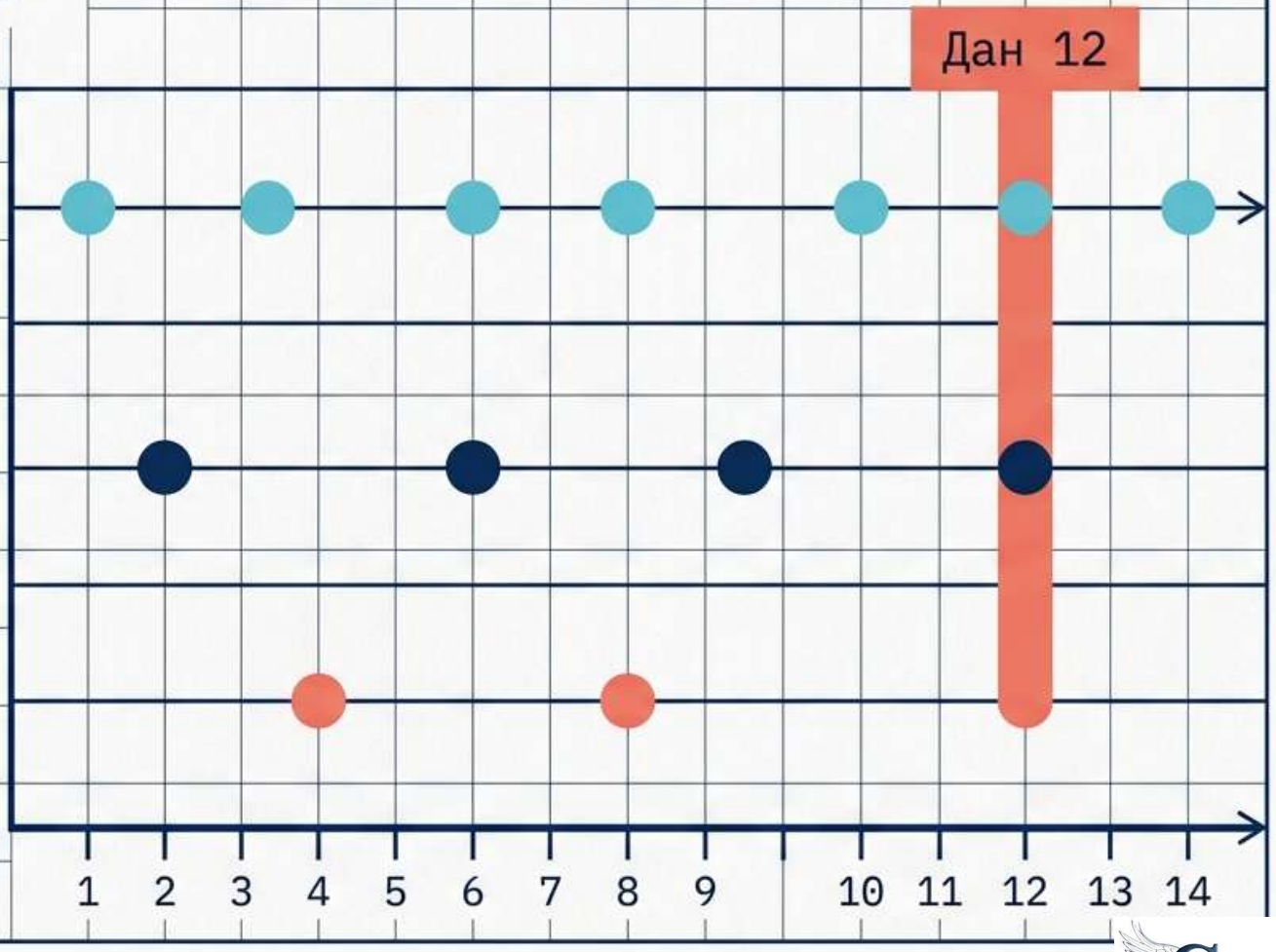
Три друга тренирају у истој теретани. Први долази свака 2 дана, други свака 3 дана, трећи свака 4 дана. Данас су се срели.

Питање:

За колико дана ће се сва тројица поново срести?

Решење:

Сусрет захтева тренутак који је дељив са 2, 3 и 4. То је математички појам заједничког садржаоца.

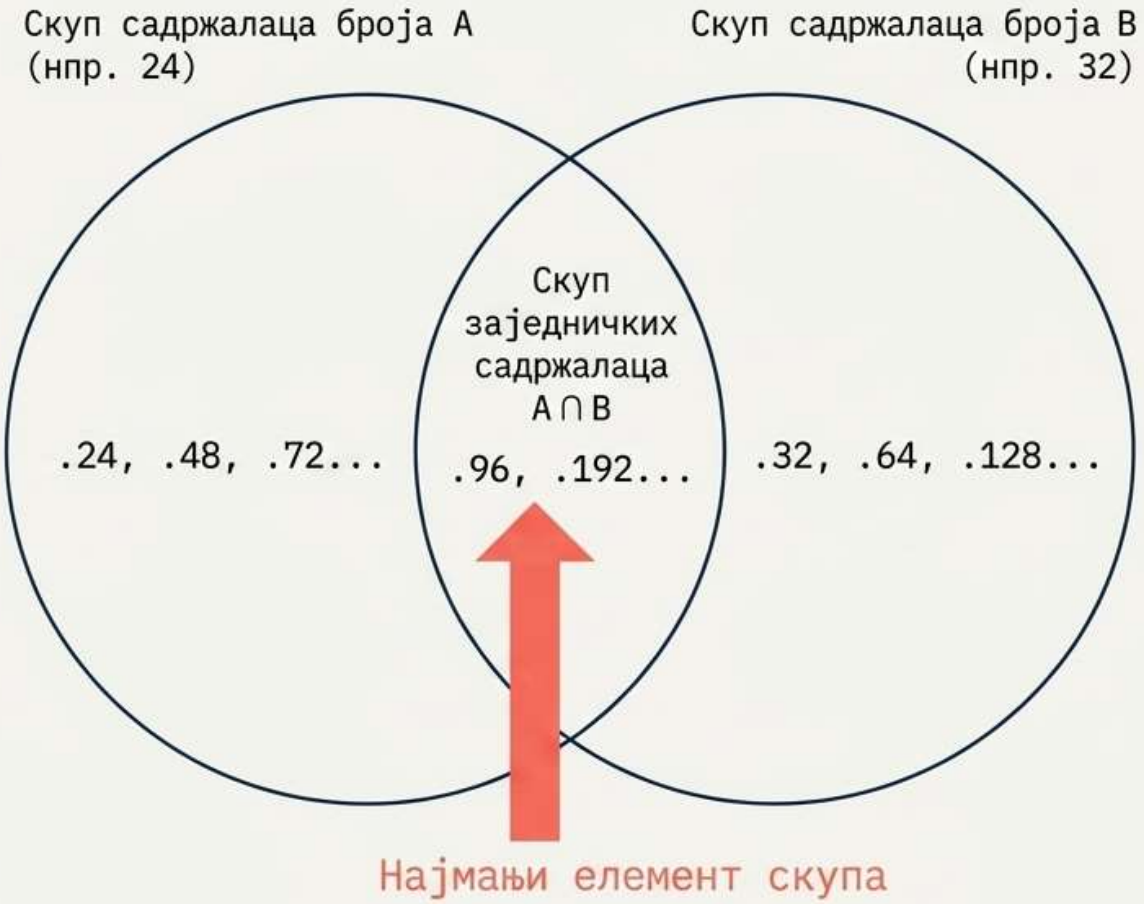


Шта је заправо НЗС?

Заједнички садржалац:
Сваки природан број који је дељив са датим бројевима a и b.

НЗС (Најмањи заједнички садржалац):
Најмањи број у бесконачном скупу заједничких садржалаца.

Док је скуп делилаца неког броја увек коначан, скуп садржалаца је бесконачан. Зато тражимо искључиво најмањи заједнички елемент, а не највећи.



Метод 1: Набрајање садржалаца

```
S_2 = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24...}
S_3 = { 3, 6, 9, 12, 15, 18, 18, 21, 24...}
S_4 = { 4, 8, 12,16, 16, 20, 24...}
```

Резултат: НЗС(2, 3, 4) = 12

Оцена: Изузетно интуитивно, али потпуно неефикасно за велике бројеве. Потребан нам је бољи алат.

Метод 2: ДНК бројева (Прости чиниоци)

Да би број био дељив са **60**, **72** и **90**, мора да садржи све њихове просте чиниоце **у највећем степену**.

60	72	90
$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	$2^3 \cdot 3^2$	$2 \cdot 3^2 \cdot 5$

$$НЗС(60, 72, 90) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$$

Метод 3: Алгоритам "Усправне црте"

Најефикаснији поступак у пракси

За НЗД (Делилац)

Делимо искључиво ако прост број дели све задате бројеве.

15, 18	3
5, 6	1

НЗД(15, 18) = 3

За НЗС (Садржалац)

Делимо чак и ако прост број дели само један број. Бројеве који нису дељиви једноставно преписујемо у следећи ред.

15, 18	2
15, 9	3
5, 3	3
5, 1	5
1, 1	

НЗС(15, 18) = $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$

Поступак се завршава када у последњем реду остану само јединице (1, 1, 1).

Усправна црта: Корак по корак



НЗС(20, 30, 35) = 2 · 2 · 3 · 5 · 7 = 420

Брзи тест: НЗС(12, 33)

12, 33	2
6, 33	2
3, 33	3
1, 11	11
1, 1	

Приметимо како се број 33 два пута само преписује, јер није дељив са 2.

$$\text{НЗС}(12, 33) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = 132$$

Кутија са алатима: Када користити коју методу?

	Брзина	Сложеност	Најбоље за
Набрајање	Ниска	Визуелно јасно	Увод у концепт и врло мале бројеве (нпр. 2, 3, 4).
Прости чиниоци	Средња	Захтева познавање степеновања	Бројеве који су већ растављени или анализу структуре.
Усправна црта	Висока	Механички алгоритам	Свакодневне задатке и веће бројеве (апсолутни стандард).

GAngel

Математичке пречице: Специјални случајеви

Како препознати НЗС без ијединог корака рачунања.

Случај А: Дељивост (Један број дели други)

Ако $a \mid b$, тада је $НЗС(a, b) = b$ (већи број).

- $НЗС(3, 9) = 9$
- $НЗС(6, 18) = 18$
- $НЗС(24, 6) = 24$

Случај Б: Узајамно прости бројеви

Ако је $НЗД(a, b) = 1$, тада је $НЗС(a, b)$ њихов производ $(a \cdot b)$.

- $НЗС(4, 7) = 4 \cdot 7 = 28$
- $НЗС(7, 11) = 7 \cdot 11 = 77$

GAngel

Кровна веза: Екосистем дељивости

$$НЗС(a, b) \cdot НЗД(a, b) = a \cdot b$$

Производ најмањег садржаоца и највећег делиоца...

...увек је једнак производу сама та два броја.

Ова фундаментална формула спаја два најважнија концепта дељивости у једну нераскидиву везу.

Доказ из праксе: Бројеви 6 и 8

Подаци

Бројеви: $a = 6,\ b = 8$

Делилац: $НЗД(6, 8) = 2$

Садржалац: $НЗС(6, 8) = 24$

Валидација

$$НЗД \cdot НЗС = 2 \cdot 24 = 48$$

$$a \cdot b = 6 \cdot 8 = 48$$

$$48 = 48$$ ✓

GAngel

Моћ формуле на великим бројевима

Бројеви a = 180, b = 462. Тражимо НЗС.

↓

Корак 1 (Брзо): Рачунамо лакши део.

НЗД(180, 462) = 6

↓

Корак 2 (Производ): Множимо почетне бројеве.

$180 \cdot 462 = 83160$

↓

Корак 3 (Откриће): Уместо факторизације џиновских бројева, користимо формулу.

$$НЗС \cdot 6 = 83160 \Rightarrow НЗС = \frac{83160}{6} = \mathbf{13860}$$

Познавање НЗД-а омогућава тренутно израчунавање НЗС-а!

GAngel

"Tahikardija" Резиме: Све на једном месту

Дефиниција

НЗС је најмањи заједнички елемент бесконачних скупова садржалаца.

Алгоритам (Усправна црта)

Делимо простим бројевима.
Недељиве бројеве само преписујемо.
Циљ су јединице (1,1,1).

Брзе пречице

- Ако a|b => НЗС = b (нпр. 6 и 18 -> 18)
- Узајамно прости => НЗС = a · b (нпр. 4 и 7 -> 28)

Златна формула

$$НЗС(a,b) \cdot НЗД(a,b) = a \cdot b$$