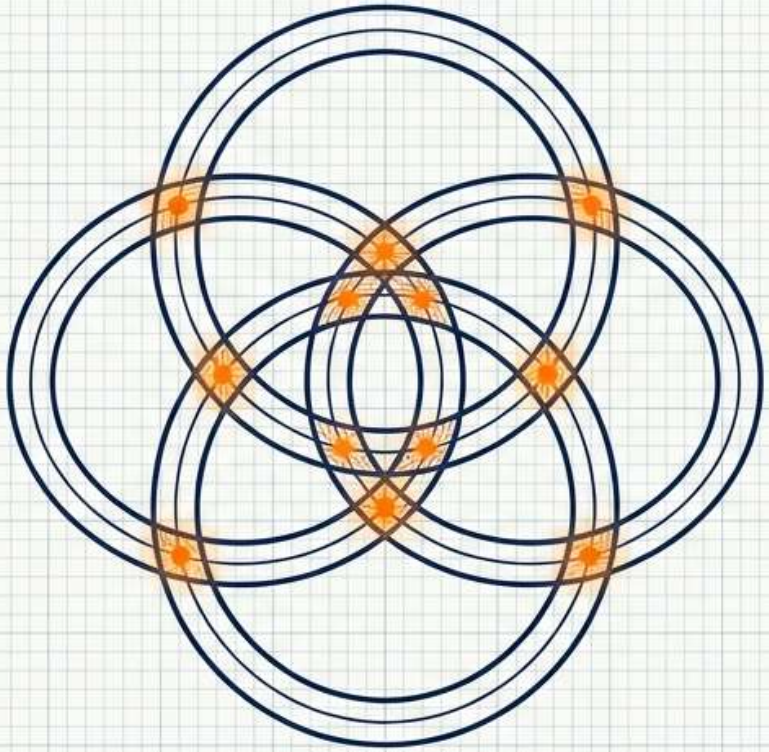
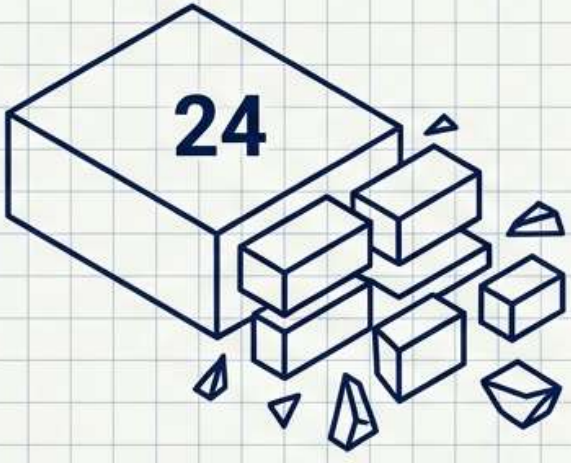


НАЈВЕЋИ ЗАЈЕДНИЧКИ ДЕЛИЛАЦ (НЗД)

Архитектура дељивости: Од основних појмова до мајсторства у решавању проблема.

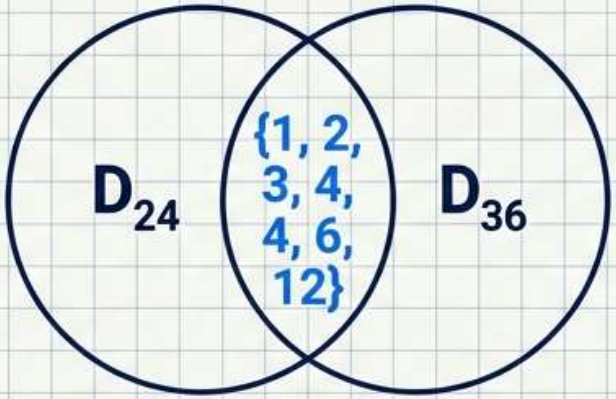
Делилац



Број којим делимо без остатка.

$D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

Заједнички



Делиоци који припадају и једном и другом броју.

D_{24} и D_{36}.

Највећи



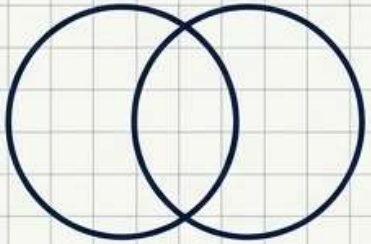
Апсолутни максимум пресека.

НЗД(24, 36) = 12

GAngel

4 Методе: Како одабрати прави алат?

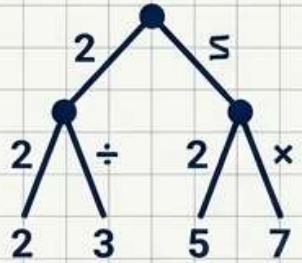
Набрајање скупова



Berdict

Само за разумевање концепта. Непрактично за бројеве веће од 50.

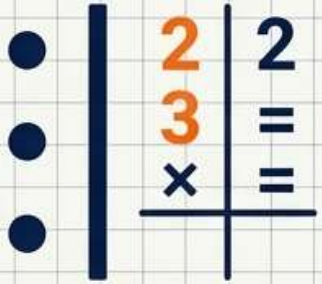
Прости чиниоци



Berdict

Одлично ако су бројеви већ растављени (нпр. **A=2·3·5, B=2·3·7**).

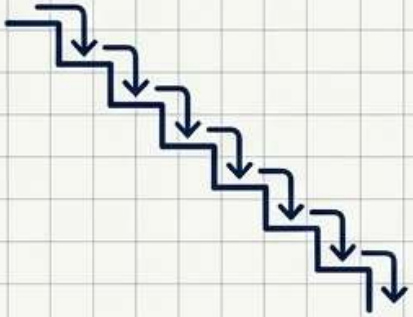
Усправна црта



Verdict

Најефикаснији алат. Златни стандард за 90% школских задатака.

Еуклидов алгоритам



Verdict

Спасилац за огромне бројеве где је тешко напамет наћи дељивост.

GAngel

Метода преклапања (Анализа ДНК броја)

A	B
$A = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11$	$B = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$



Преклапање чини НЗД: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 330$.

Који број је већи?

А има вишак 5.
В има вишак 3.
Не морамо да множимо!
Заједнички део је исти,
остатак 5 > 3, дакле A > B.

GAngel

Најефикаснији алат: Метода усправне црте

210, 315, 525	3	(Збир цифара дељив са 3)
70, 105, 175	5	(Завршавају се на 0 или 5)
14, 21, 35	7	(Из таблице множења за 7)
2, 3, 5	**Стоп! Узајамно прости бројеви.**	

НЗД = 3 · 5 · 7 = 105

Поступак се завршава искључиво када у истом реду остану узајамно прости бројеви.

GAngel

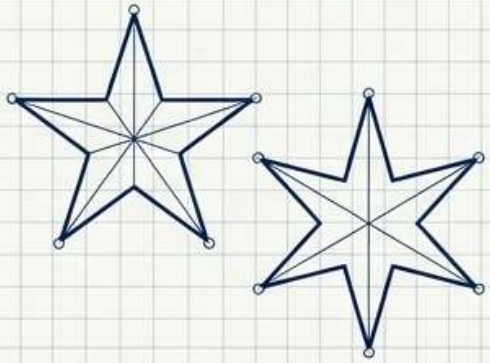
Еуклидов алгоритам: За велике бројеве (165 и 104)

$$165 = 104 \cdot 1 + \mathbf{61}$$
$$104 = 61 \cdot 1 + \mathbf{43}$$
$$61 = 43 \cdot 1 + \mathbf{18}$$
$$43 = 18 \cdot 2 + \mathbf{7}$$
$$18 = 7 \cdot 2 + \mathbf{4}$$
$$7 = 4 \cdot 1 + \mathbf{3}$$
$$4 = 3 \cdot 1 + \boxed{\mathbf{1}}$$
$$3 = 1 \cdot 3 + 0$$

Последњи остатак различит од нуле је 1.
Дакле, **НЗД**(165, 104) = 1.
Ови бројеви су узајамно прости.

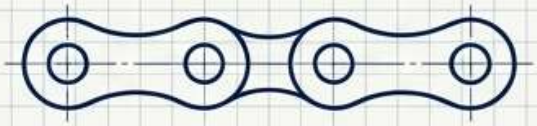
GAngel

Узајамно прости бројеви: Правила игре (НЗД = 1)



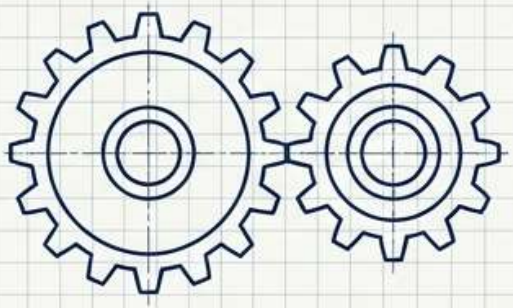
Два проста броја су увек узајамно проста.

Пример: 11 и 13.



Два узастопна природна броја су увек узајамно проста.

Пример: 99 и 100.

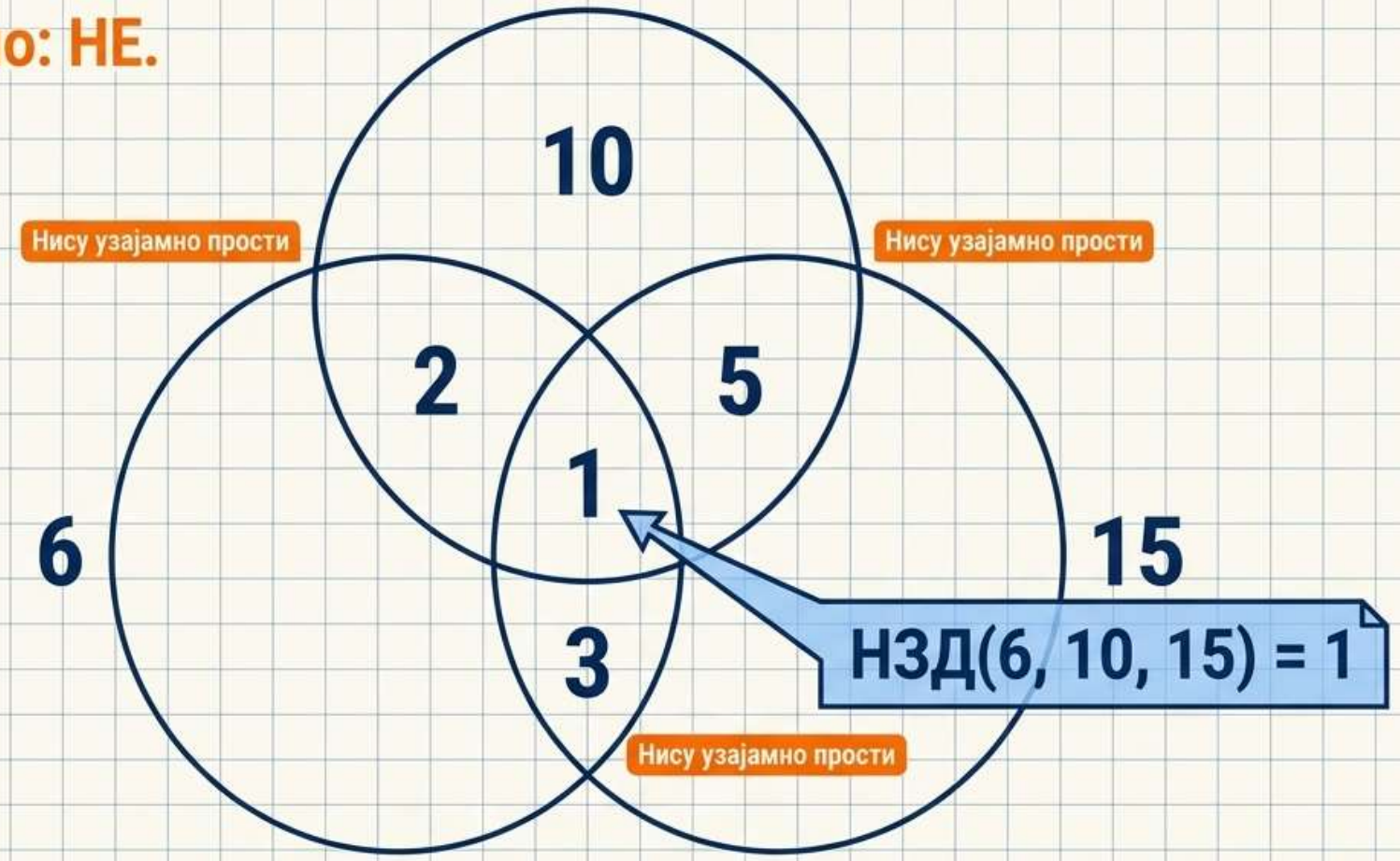


Два узајамно проста броја не морају бити проста!

Пример: 9 и 28 (Оба су сложена, али немају заједничких делилаца).

Честа заблуда: Ако је НЗД(a,b,c)=1, да ли су парови узајамно прости?

Кратко и јасно: НЕ.



Закључак: Услов за НЗД три броја је блажи од паровне узајамне простос

Шаблон 1: Проблеми са остатком

Којим бројем можемо поделити 229, 158 и 135 тако да остаци буду 1, 2 и 3?

Корак 1: Очисти остатак

229 - 1 = **228**
158 - 2 = **156**
135 - 3 = **132**

Корак 2: Пронађи НЗД (Мотор)

228	2
156	2
132	3
2	

НЗД = 2 · 2 · 3 = **12**

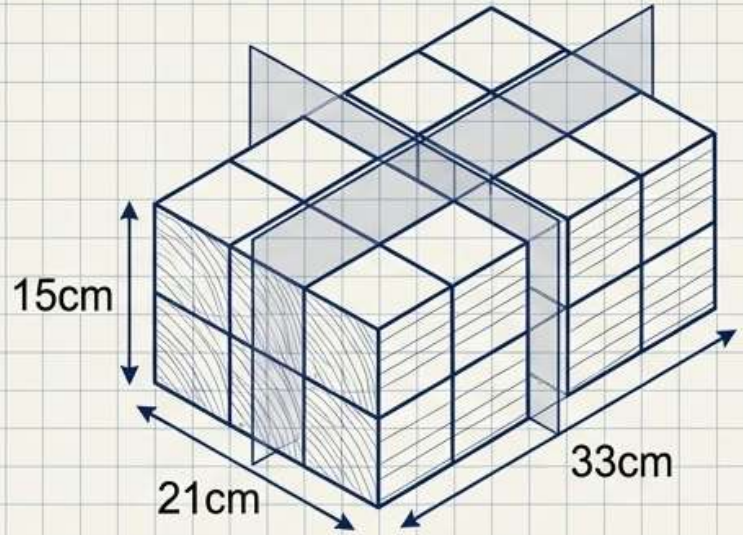
Корак 3: Брза провера

229 : 12 = 19 (остатак 1).
Решено!

GAngel

Шаблон 2: Дељење на једнаке делове (Без отпада)

Физичка транслација



Једнаке коцке	→	Заједнички делилац.
Без отпада	→	Дељење без остатка.
Што веће	→	НАЈВЕЋИ заједнички делилац.

Математички мотор

Проблем: Столар Пеђа има квадар 15cm x 21cm x 33cm. Жели да га исече на што веће једнаке коцке без отпада.

НЗД(15, 21, 33)

3	15 , 21 , 33
	5 , 7 , 11

→ Делимо са 3. Остају 5, 7, 11 (узајамно прости).

Решење: Ивица коцке мора бити 3cm.

GAngel

Шаблон 3: Обрнути инжењеринг

17. Збир два природна броја је 60, а њихов НЗД је 12. Нађи те бројеве.

1. НЗД је 12, па су бројеви $12 \cdot x$ и $12 \cdot y$ (где су x и y узајамно прости).
2. $12x + 12y = 60 \rightarrow x + y = 5$

$x + y = 5$

Пар (1, 4)	Пар (2, 3)
$12 \cdot 1 = 12$ $12 \cdot 4 = 48$ (Провера: 12+48=60)	$12 \cdot 2 = 24$ $12 \cdot 3 = 36$ (Провера: 24+36=60)

Закључак: Постоје два тачна решења!

GAngel

Математички нацрт: Резиме за брзо подсећање

Златно правило

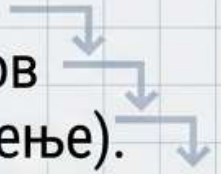
Ако a дели b, тада је НЗД(a,b) = a (нпр. НЗД(6, 42) = 6).



Алгоритми у пракси



- **Мали бројеви:** Усправна црта (дели док не остану узајамно прости).
- **Огромни бројеви:** Еуклидов алгоритам (каскадно дељење).



Решавање проблема (Шаблони)

- **Задаци са остатком:** Прво одузми остатак → онда тражи **НЗД**.
- **Физичка подела (коцке, свеске):** Директно тражи **НЗД** димензија.

GAngel